▶ ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΦΘΙΝΟΝΤΕΣ ΟΡΟΥΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: (κριτήριο δυνάμεων του 2)

Αν $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, τότε οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu}$ συγκλίνουν (ή απειρίζονται θετικά) ταυτοχρόνως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξεταστούν οι σειρές ως προς τη σύγκλιση: (Μέσω του παραπάνω κριτηρίου)

α. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και β. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}, \nu \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

α. Έστω, $a_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$

- Η a_ν φθίνουσα ακολουθία $\forall \nu \in \mathbb{N}$
- $a_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \cancel{2^\nu} \cdot \frac{1}{\cancel{2^\nu}} = \nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty$$

(με ν η ακολουθία μερ. αθρ. σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $\lim \sigma_\nu = \lim \nu = +\infty$)

(Αν και είναι προφανές ότι η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ διότι η $a_\nu = \frac{1}{\nu^1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ρ-Σειρά με $\rho = 1$, άρα θα αποκλίνει)

β. Έστω, $a_\nu = \frac{1}{\nu^\rho}, \nu \in \mathbb{N}$

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu < \nu+1 \Rightarrow \nu^\rho < (\nu+1)^\rho \Rightarrow \frac{1}{\nu^\rho} > \frac{1}{(\nu+1)^\rho} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_\nu > a_{\nu+1}$, Η a_ν φθίνουσα $\nu \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2^\nu} \cdot 2^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2^\nu)^\rho} \cdot 2^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\rho-1})^\nu} \rightarrow \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Προφανώς, θα συγκλίνει αν $\frac{1}{(2^{\rho-1})^\nu} < 1 \Rightarrow \boxed{\rho > 1}$

2) Να εξεταστεί η παρακάτω σειρά ως προς τη σύγκλιση

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2}$$ (Μέσω του Παραπάνω κριτηρίου).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $a_\nu = e^{-(\log\nu)^2}$, $\nu\in\mathbb{N}$

- $a_\nu \geq 0$, $\nu\in\mathbb{N}$
- $\nu<\nu+1 \Rightarrow \log\nu<\log(\nu+1) \Rightarrow -(\log\nu)^2 > -(\log(\nu+1))^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-(\log\nu)^2} > e^{-(\log(\nu+1))^2} \Rightarrow a_\nu > a_{\nu+1} \Rightarrow a_\nu \downarrow \ \forall\nu\in\mathbb{N}$

(<u>Β' τρόπος</u> Θεωρούμε ως $f(x)=e^{-(\log x)^2}$, $x\geq 2$

$f'(x)=e^{-(\log x)^2}\cdot\left(-2\cdot\log x\cdot\frac{1}{x}\right)<0$, άρα η $f\downarrow : [2,+\infty)$)

Έπειτα, $\sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu a_{2^\nu} = \sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu\cdot e^{-(\log 2^\nu)^2} =$

$= \sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu\cdot e^{-\nu^2\cdot(\log 2)^2}$, όπου $(\log 2)^2 = \sigma\tau\alpha\theta = c$

άρα $\sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu\cdot e^{-\nu^2\cdot c} = \sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu\cdot\frac{1}{e^{c\cdot\nu^2}}$. (*)

Εφαρμόζοντας Κριτήριο Πηλίκων (D'alembert), έχουμε.

$$\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim\frac{\frac{2^{\nu+1}}{e^{c\cdot(\nu+1)^2}}}{\frac{2^\nu}{e^{c\cdot\nu^2}}} = \lim\frac{2^{\nu+1}\cdot e^{c\nu^2}}{e^{c\cdot(\nu+1)^2}\cdot 2^\nu} =$$

$$= \lim\frac{\cancel{2^\nu}\cdot 2\cdot\cancel{e^{c\nu^2}}}{\cancel{2^\nu}\cdot\cancel{e^{c\nu^2}}\cdot e^{2c\nu}\cdot e^c} = \lim\frac{2}{e^{c(2\nu+1)}} = 0 < 1$$

Άρα, η (*) $\sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu\cdot\frac{1}{e^{c\cdot\nu^2}} < +\infty$.

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Ορισμος : Μια σειρα θα λεγεται εναλλασσόμενη εαν $a_v \cdot a_{v+1} < 0$ για καθε $v \in \mathbb{N}$. $\left[\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot a_v = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{v+1} \cdot a_v + \dots \right]$

Κριτήριο (Θεώρημα) Leibniz :

Αν μια ακολουθία $a_v, v \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και μηδενική θετικών πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_v < +\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να εξετασθουν ως προς τη συγκλιση οι εξής σειρες:

i). $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$. ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n+1}{2^n}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{v+2}{2v+1}$ (όλες οι σειρές είναι εναλλασσόμενες)

ΛΥΣΗ

i) Έστω $a_n, n \in \mathbb{N}$ ωστε $a_n = \frac{1}{n+1}$

- $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα , $n \in \mathbb{N}$
- $\lim a_n = 0$

$\Big\}$ Απο κρ. Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} < +\infty$

ii) Εστω $\beta_n, n \in \mathbb{N}$ ωστε $\beta_n = \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

- $\beta_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- β_n φθινουσα , $n \in \mathbb{N}$ αφου $p > 0 \rightsquigarrow \left[\frac{1}{1^p} \geq \frac{1}{2^p} \geq \frac{1}{3^p} \geq \dots \geq \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n^{p+1}} \geq \dots \right]$
- $\lim \beta_n = 0$

Αρα, απο κρ. Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_n < +\infty$

iii) Εστω $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ ωστε $\gamma_n = \frac{3n+1}{2^n}$

- $\gamma_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{3n+4}{2^{n+1}} - \frac{3n+1}{2^n} = \frac{3n+4-6n-2}{2^{n+1}} = \frac{2-3n}{2^{n+1}} \underset{n \in \mathbb{N}}{<} -\frac{1}{2^{n+1}} < 0$

$\bullet \lim \gamma_n = \lim \frac{3n+1}{2^n} = \lim \left(\frac{3n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right)$

$= \lim \left(\frac{\sqrt[n]{3n}}{2} \right)^n = \lim \left(\frac{\sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n}}{2} \right)^n =$

$= \lim \left(\frac{1}{2} \right)^\nu = 0$

Αρα, απο Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$

iv) Εστω $\delta_n, n \in \mathbb{N}$ ωστε $\delta_n = \frac{n+2}{2n+1}$

$\bullet\ \delta_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

$\bullet \lim a_n = \lim \frac{n+2}{2n+1} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$

Αρα, δεν πληρειται το κρ. Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = +\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^2$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{e^n}$.

ΛΥΣΗ

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\rho = 2$ άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, Εστω $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} \bullet\ a_n \text{ φθίνουσα } n \in \mathbb{N} \\ \bullet\ a_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \\ \bullet \lim a_n = 0 \end{cases}$

άρα συγκλίνει απο κρ. Leibnitz

iii) Εστω $\beta_n = \frac{n}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\bullet\ \beta_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

$\bullet \lim \beta_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{e} \right)^n =$

$= \lim \left(\frac{1}{e} \right)^n = 0.$

$\bullet\ \beta_{n+1} - \beta_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} - \frac{n}{e^n} =$

$= \frac{n+1-en}{e^{n+1}} = \frac{n(1-e)+1}{e^{n+1}} \leq$

$\leq \frac{2-e}{e^{n+1}} < 0$

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ.